

## Zestaw II

### Zadanie 1.

Funkcja  $f$  jest określona wzorem  $f(x) = \frac{-2x+19}{x-3}$  dla  $x \neq 3$ . Punktem kratowym nazywamy punkt w układzie współrzędnych, którego obie współrzędne są liczbami całkowitymi. Wyznacz wszystkie punkty kratowe należące do wykresu funkcji  $f$ .

### Zadanie 2.

W nieskończonym ciągu geometrycznym suma wyrazów o numerach nieparzystych jest równa 240, a suma wyrazów o numerach parzystych jest równa 120. Oblicz sumę trzech początkowych wyrazów tego ciągu.

### Zadanie 3.

Dany jest okrąg o równaniu  $x^2 + y^2 - 12x + 6y + 40 = 0$ . Wyznacz współrzędne punktu leżącego na okręgu, który znajduje się najbliżej początku układu współrzędnych.

### Zadanie 4.

Dany jest układ równań  $\begin{cases} mx + y = 4 \\ 4x + my = m \end{cases}$  z niewiadomymi  $x$  i  $y$  oraz parametrem  $m$ . Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$ , dla których układ jest oznaczony, a para liczb  $(x,y)$  będąca rozwiązaniem układu spełnia warunek  $x+y \geq 4$ .

### Zadanie 5.

Z urny, w której znajduje 6 kul białych i 3 czarne, losujemy dwie kule. Następnie z pozostałych kul losujemy jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosowana kula będzie biała.

### Zadanie 6.

Dany jest okrąg o środku w punkcie  $S$  i równaniu  $x^2 + y^2 + 4y + 3 = 0$ . Z punktu  $A=(0,1)$  poprowadzono proste styczne do okręgu w punktach  $B$  i  $C$ . Oblicz pole czworokąta  $ABSC$ . Wyznacz równania tych stycznych.

### Zadanie 7.

Wysokość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa  $h$ . Kąt między jest krawędziami bocznymi ma miarę  $\alpha$ . Uzasadnij, że objętość ostrosłupa wyraża się wzorem  $V = \frac{h^3 \sqrt{3} \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{3 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$ . Wyznacz jaki warunek spełnia miara kąta  $\alpha$ .

### Zadanie 8.

Dany jest trójkąt prostokątny  $ABC$ , w którym  $|\angle ACB| = 90^\circ$ ,  $|AC| = 2\sqrt{2}$  i  $|BC| = 2$ . Wykaż, że środkowe  $BD$  i  $CE$  tego trójkąta są do siebie prostopadłe.

### Zadanie 9.

Ze zbioru liczb  $\{2,3,4,5,11,12\}$  wybieramy po kolei bez zwracania dwie liczby i tworzymy z nich ułamek zwykły w ten sposób, że pierwsza wylosowana liczba jest licznikiem, a druga mianownikiem ułamka. Oblicz prawdopodobieństwo utworzenia ułamka nieskracalnego, pod warunkiem, że ułamek jest mniejszy od 1. Zapisz obliczenia.

### Zadanie 10.

Rozwiąż równanie  $2 + \sin 2x = 2 \cos^2 x + 2 \sin x$ . Zapisz obliczenia.

### Zadanie 11.

Dany jest trójkąt  $ABC$ , w którym  $\sin \alpha = \frac{2}{3} \sin \beta$  oraz  $|AB| = 16$ . Dwusieczna kąta  $ACB$  przecina bok  $AB$  w punkcie  $P$ . Oblicz długość odcinków  $AP$  i  $PB$ . Zapisz obliczenia.

### Zadanie 12.

Strzelec trafia do tarczy w pojedynczym strzale z prawdopodobieństwem 0,7. Oblicz, ile musi on oddać co najmniej strzałów, aby z prawdopodobieństwem większym od 0,96 trafić do tarczy co najmniej raz. Zapisz obliczenia.